

Dualidad aproximada para Marcos

Díaz, Jorge; Heineken, Sigrid; Morillas, Patricia

jpgdiaz1179@gmail.com; sigrid.heineken@gmail.com; morillas.unsl@gmail.com

Universidad Nacional de San Luis - IMASL(CONICET)

Grupo de Análisis no Lineal - Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura

Universidad Nacional del Nordeste

Palabras clave: Espacios de Hilbert, Marcos duales oblicuos aproximados, Marcos duales oblicuos, Marcos duales aproximados, Proyecciones oblicuas.

Introducción

Los marcos son sucesiones de vectores en un espacio de Hilbert separable que generalizan a las bases. La diferencia radica en que la reconstrucción que permiten no es única, es decir, existe más de una colección de coeficientes para la representación de un vector como combinación de los elementos del marco. Por esto se dice que son redundantes. Estos coeficientes están vinculados a otras sucesiones llamadas *marcos duales*. En la práctica, el cálculo de duales no es exacto. Los marcos duales aproximados aparecen en la teoría como una posible respuesta a esta situación.

Cuando se trata de un marco para un subespacio, la reconstrucción también puede hacerse con coeficientes que dependen de marcos duales que no necesariamente se encuentran incluidos en este. Esto se conoce en la teoría como *marcos duales oblicuos*. El nombre de oblicuos se deriva de la vinculación de la

representación que se logra y las proyecciones oblicuas.

En este trabajo se introduce el concepto de *marcos duales oblicuos aproximados*, para dar respuesta a situaciones donde, por un lado, el marco y su dual pertenecen a subespacios distintos y, por otro, no se cuenta con el dual oblicuo exacto.

Objetivos

Estudiar propiedades que permitan desarrollar el concepto de *marcos duales oblicuos aproximados*, introducido en este trabajo, a partir de objetos ya presentes en la teoría de marcos.

Materiales y Métodos

Los materiales utilizados fueron artículos y libros, la mayoría de ellos citados en la bibliografía.

La metodología de trabajo fue la usual en Matemática. Se estudiaron resultados previos sobre marcos y dualidad. Las

conjeturas fueron demostradas o desechadas mediante contraejemplos.

Los marcos también tienen asociadas otras sucesiones $\{g_k\}$ que verifican

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k$$

Resultados y Discusión

Dado H un espacio de *Hilbert separable*, un *marco* en H es una sucesión $\{f_k\}$ para la cual existen los números reales positivos A y B tales que

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

para todo f en H .

Un *marco* no es necesariamente una base, pero una propiedad muy importante de estos es la de permitir, al igual que una base, la representación de todos los vectores del espacio mediante expansiones en series utilizando como coeficientes a elementos de $\ell^2(\mathbb{N})$.

En virtud de esto, tiene asociado un operador acotado $T: \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow H$ tal que

$$T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

a T se lo conoce como *operador de síntesis*.

Su adjunto $T^*: H \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ está definido por

$$T^* f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

y es llamado *operador de análisis*.

La composición de estos define, en H , al operador acotado S que se lo conoce como *operador de marco*.

$$Sf = TT^* f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k$$

para f en H .

Estas también resultan ser marcos y son denominadas *marcos duales* de $\{f_k\}$.

Duales Aproximados

Dados dos marcos $\{f_k\}$ y $\{g_k\}$ en H , siendo T y U sus respectivos operadores de síntesis, decimos estos son *marcos duales aproximados* si

$$\|I - TU^*\| < 1$$

Marcos Oblicuos

Dados dos subespacios cerrados, W y V , en H tales que $H = W \oplus V^\perp$. Si $\{f_k\}$ es un marco para W y $\{g_k\}$ es un marco para V , cuyos operadores de síntesis son respectivamente T y U ; decimos que $\{g_k\}$ es un *dual oblicuo* para $\{f_k\}$ en V si

$$TU^* = E_{WV^\perp}$$

donde E_{WV^\perp} es la proyección oblicua sobre W a lo largo de V^\perp , es decir, E_{WV^\perp} es el operador acotado el H que es tal que $E_{WV^\perp} f = f$, si f en W , y $E_{WV^\perp} f = 0$, si f en V^\perp .

En este trabajo se estudia la posibilidad de extender las propiedades de la

reconstrucción aproximada (duales aproximados) al caso de marcos oblicuos. Se introduce la definición de *marcos duales oblicuos aproximados*.

En un espacio de Hilbert $H = W \oplus V^\perp$, donde W y V son dos subespacios cerrados. Diremos que las sucesiones $\{f_k\} \subset W$ y $\{g_k\} \subset V$ son *marcos duales aproximados* si

$$\|E_{WV^\perp} - TU^*\| < 1,$$

donde T y U son los operadores de síntesis para $\{f_k\}$ y $\{g_k\}$, respectivamente.

Una característica importante es que se permite la reconstrucción aproximada tanto en W como en V , en virtud de que también se verifica

$$\|E_{VW^\perp} - UT^*\| < 1$$

A partir de esta definición se muestra que los *duales oblicuos aproximados* conservan y, por lo tanto, extienden propiedades tanto de *duales aproximados* como de *marcos oblicuos*.

Entre los resultados obtenidos podemos mencionar:

Diferentes caracterizaciones de los marcos duales oblicuos aproximados, tanto en términos de expansiones en serie como de operadores.

Proposición: Sean $\{f_k\}$, $\{g_k\}$ sucesiones de Bessel en H , tales que $\text{span}\{f_k\} = W$ y

$\text{span}\{g_k\} = V$, con $H = W \oplus V^\perp$. Entonces son equivalentes:

- I. $\|E_{WV^\perp} - \sum_k \langle f, g_k \rangle f_k\| \leq \epsilon \|f\|$ para f en H y algún $\epsilon > 0$.
- II. $\|\langle \square, \square^\perp \rangle - \sum_k \langle \square, \square_k \rangle \square_k\| \leq \epsilon \|f\|$ para f en H y algún $\epsilon > 0$.
- III. $|\langle \square_{\square^\perp}, \square \rangle - \sum_k \langle \square, \square_k \rangle \langle \square_{\square^\perp}, \square_k \rangle| \leq \epsilon \|f\| \|g\|$ para f, g en H y algún $\epsilon > 0$.
- IV. $|\langle \square_{\square^\perp}, \square \rangle - \sum_k \langle \square, \square_k \rangle \langle \square_{\square^\perp}, \square_k \rangle| \leq \epsilon \|f\| \|g\|$ para f, g en H y algún $\epsilon > 0$.

Se demostró que se puede obtener una reconstrucción de los elementos de cada subespacio tan cercana como se desee.

Proposición: Si $\{f_k\}$ y $\{g_k\}$ son duales oblicuos aproximados siendo T y U , sus correspondientes operadores de síntesis, se verifica que:

Para $N \in \mathbb{N}$ fijo, si consideramos el siguiente vector

$$\gamma_k^{(N)} = g_k + \sum_{n=1}^N (E_{VW^\perp} - UT^*)^n g_k$$

entonces, $\{\gamma_k^{(\square)}\}$ es un dual oblicuo aproximado de $\{f_k\}$ en V y; si \square_{\square^\perp} es su correspondiente operador de síntesis, se tendrá:

$$\left| \|\square_{\square\square^\perp} - \square_{\square\square^*}\| \right| \leq \left| \|\square_{\square\square^\perp} - \square_{\square\square^*}\| \right|^{\square+1} \rightarrow 0$$

cuando $\square \rightarrow 0$.

Cuando H un espacio de Hilbert tal que $H = W \oplus V^\perp$, donde W y V son dos subespacios cerrados. Dado un marco $\{h_k\} \subset V$ y un dual oblicuo $\{f_k\} \subset W$ de $\{h_k\}$, se encontraron condiciones bajo las cuales una perturbación $\{g_k\} \subset V$ de $\{h_k\}$ es un dual oblicuo aproximado de $\{f_k\}$.

Proposición: H espacio de Hilbert. W, V subespacios cerrados tales que $H = W \oplus V^\perp$. $\{h_k\}$ un marco para V . $\{g_k\} \subset V$, una sucesión tal que $\sum_k |\langle \square, \square_\square - \square_\square \rangle|^2 \leq \square \|\square\|^2$, para $f \in V$. $\{f_k\}$ un dual oblicuo de $\{h_k\}$ en W cuya cota superior de marco, C , verifica que $\square < \frac{1}{C}$.

Entonces, $\{g_k\}$ es dual oblicuo aproximado de $\{f_k\}$ en V .

Bibliografía

[1] P. G. Casazza y G. Kutyniok, "Finite Frames. Theory and Applications", Birkhäuser, Boston (ISBN: 978-0817683726), 2012.

[2] O. Christensen, "An introduction to frames and Riesz bases", Second Ed., Birkhäuser, Boston, 2016.

[3] O. Christensen y R. S. Laugesen, "Approximately dual frames in Hilbert spaces and applications to Gabor frames", Sampling Theory in Signal and Image Processing (ISSN: 1530-6429), vol: 9, pages: 77-90, 2011.

[4] O. Christensen y Y.C. Eldar, "Characterization of oblique dual frame Pairs", EURASIP J. Appl. Signal Process., 1-11, 2006.

[5] O. Christensen y Y.C. Eldar, "Oblique dual frames and shift-invariant spaces", Appl. Comput. Harmon. Anal., 17:48-68, 2004.

[6] Y.C. Eldar, "Sampling with arbitrary sampling and reconstruction spaces and oblique dual frame vectors", J. Fourier Anal. Appl., 9(1):77-96, 2003.

[7] Y.C. Eldar, "Sampling without input constrains: consistent reconstruction in arbitrary spaces", in Sampling, Wavelets and Tomography, A. Zayed and J. J. Benedetto Eds., Birkhäuser Boston, 33-60, 2003.

[8] Y.C. Eldar y T. Werther, "General framework for consistent sampling in Hilbert spaces", Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process., 3(4) :497-509, 2005.

[9] J. Kovačević y A. Chebira, "An introduction to frames", Found. Trends Signal Process. 2, 1-94, 2008.

[10] P. Berger, K. Gröchenig y G. Matz,

“Sampling and Reconstruction in
distinct subspaces using Oblique
Projections”, arxiv.org, Junio 2017.

[11] S. S. Kutateladze, “Fundamentals of
Functional Analysis”, Kluvec Academic
Publishers (ISBN: 978-90-481-4661-1),
1996.

Agradecimientos

A mis directoras, Dra Patricia Morillas
(UNSL-IMASL) y Dra Sigrid Heineken
(UBA - IMAS) por su constante apoyo y
sus conocimientos del tema de estudio
para direccionar el desarrollo de este
trabajo.

Financiamiento

IMASL-CONNICET (UNSL) (Becario
doctoral).