

# NOMOGRAMA PARA EL CALCULO DE LA RADIACION TEORICA RECIBIDA POR CM<sup>2</sup> DE SUPERFICIE HORI- ZONTAL Y POR DIA AL TOPE DE LA ATMOSFERA PARA LATITUDES DEL HEMISFERIO SUR

POR PEDRO CARLOS FERNANDEZ <sup>1</sup>

## INTRODUCCION

Diversas fórmulas empleadas en Meteorología, Hidrología e Irrigación, utilizan la radiación teórica al tope de la atmósfera, para, en base a ella, encontrar datos de interés práctico, tales como el pronóstico de la velocidad de evaporación y evapotranspiración. Cabe mencionar entre ellas, la fórmula de PENMAN (1948), la de BOUCHET (1963), la de GRASSI-CHRISTIANSEN (1964).

La obtención de este valor variable para cada latitud y a su vez para cada día del año, resulta tarea engorrosa si no se dispone de tablas o se confeccionan especialmente para una determinada localidad. Las tablas que se encuentran en la literatura, tales como la de SHAW (1942), permiten obtener valores medios semanales de la radiación teórica; y el mapa que incluye la publicación de la *American Meteorological Society* (1951) es de interpolación muy poco exacta en caso de requerirse valores de un día determinado. El presente trabajo trata la confección de un nomograma que permita la obtención en forma gráfica y sencilla, de valores diarios de la radiación solar al tope de la atmósfera.

## INTEGRACION DE LA FORMULA DE RADIACION INSTANTANEA

En un instante determinado una superficie horizontal expuesta perpendicularmente a los rayos solares y en ausencia de atmósfera, recibe 1,94 cal/cm<sup>2</sup>/minuto. Este valor es lo que se denomina "constante solar",  $R_0$ . Si en un determinado instante los rayos no llegaran normales a la superficie (fig. 1), formando un ángulo  $Z$ , la radiación teórica, por una simple relación trigonométrica,

<sup>1</sup> Ingeniero agrónomo. Investigador del Instituto de Suelos y Riego de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional de Cuyo.

sería  $R = R_0 \cos z$ . Si a  $HH'$  lo consideramos como el horizonte matemático del lugar;  $oz$ , la vertical del lugar;  $os$  la visual dirigida al sol en el instante considerado, resulta que el ángulo  $Z$  es la distancia zenital, siendo  $h$  la altura del astro sobre el horizonte (fig. 2).

Como  $Z$  se mide de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  a partir del zenit del lugar, tendremos que, cuando el sol sale,  $Z=90^\circ$  y  $\cos Z = 0$ ; luego  $R=0$ .

Para una latitud determinada, por ejemplo  $0^\circ$ , un día en que el sol recorre el ecuador (equinoccios), en el momento en que el sol culmina será:  $Z=0$ ,  $\cos Z=1$ ,  $R=R_0$ . La variación de los va-

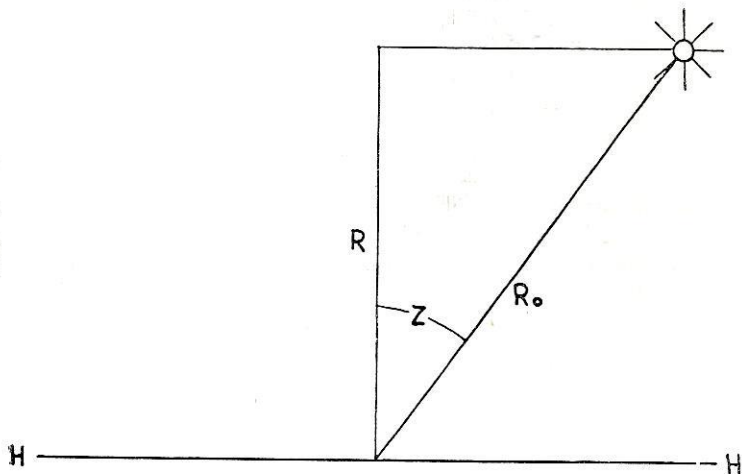


Figura 1

lores, que  $Z$  va adquiriendo día a día, dependen de la latitud considerada y de la declinación del sol. A su vez, para un día determinado, en un lugar de la tierra,  $Z$  va variando desde  $Z=90^\circ$  (salida del sol) hasta un valor de  $Z$  mínimo (medio día), para luego repetir los valores hasta  $Z=90^\circ$  (puesta del sol). Como  $Z$  es variable en función del tiempo, o sea del ángulo horario del sol, la radiación total de un día en un determinado lugar, será:

$$R = R_0 \int_{t_2}^{t_1} \cos Z \, dt \quad (2)$$

La ecuación que usó MILANKOVITCH, citado por SHAW (1942) para calcular los mapas de radiación teórica hace figurar el radio vector de la órbita terrestre; o sea:

$$R = \frac{R_0}{p^2} \int_{t_2}^{t_1} \cos Z \, dt$$

Si la órbita de la tierra, en su recorrido anual, fuera circular, este valor de  $\rho$  sería constante y no tendría influencia en la fórmula; pero de acuerdo a la primera ley de KEPLER se sabe que la órbita es elíptica y que el sol ocupa uno de sus focos.

Si consideramos a  $\rho = 1$  para la distancia media, es indudable que en el perigeo (menor distancia)  $\rho < 1$ , luego  $R$  es mayor; y a la inversa, en el apogeo, donde  $\rho > 1$ ,  $R$  es menor.

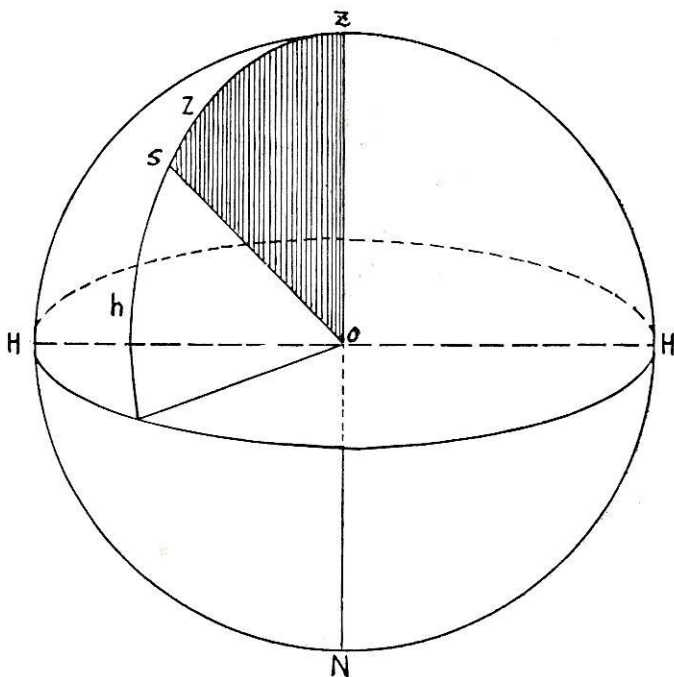


Figura 2

Siendo la excentricidad de la órbita terrestre,  $e = 0,01675$  (muy próximo a una circunferencia donde  $e = 0$ ), las variaciones de  $\rho$  para los fines de confección del nomograma no se han considerado, pues el error que se comete con el método gráfico supera a los posibles errores causados por la omisión de este factor. Sin embargo, esto se podría subsanar con el agregado de un "factor de órbita", que afecte al valor calculado de  $R$ .

Para integrar la fórmula (2) se requiere poner el valor de  $Z$  en función de valores o coordenadas que sean fácilmente obtenibles y que influyan en su variación. Expresaremos a tal fin, a  $Z$ , distancia Zenital del sol, en función de la latitud del lugar  $\theta$ , y de la declinación del sol  $\delta$ , en el día considerado.

Consideremos la posición del sol,  $S$ , en un determinado instante de declinación sur  $(-)$  (fig. 3).

En la esfera celeste se nos forma un triángulo de posición  $zs$ - $Ps$ , donde:

$Z$  es la distancia zenital

$\delta$  es la declinación

$\theta$  es la latitud del lugar

$t$  es el ángulo horario

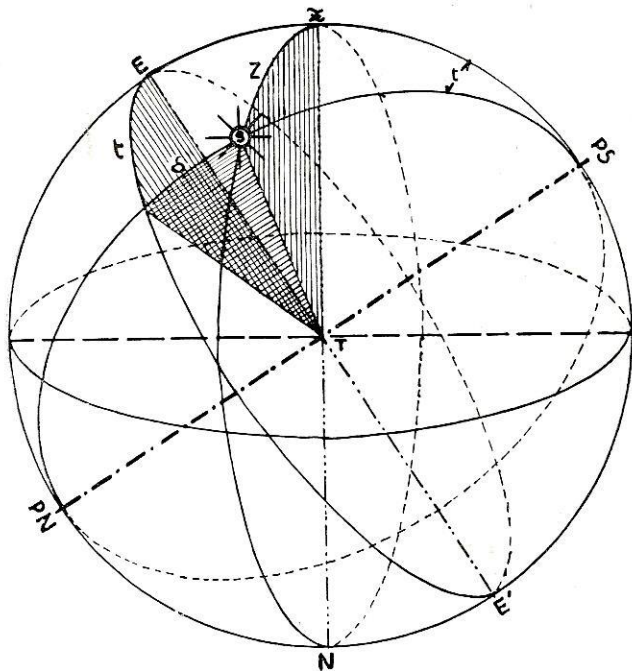


Figura 3

En el triángulo tenemos los siguientes elementos (fig. 4). Siendo  $\delta$  y  $\theta$  conocidos, aplicando el teorema del coseno para  $Z$  se tiene:

$$\cos Z = \cos (90^\circ + \delta) \cos (90^\circ + \theta) + \sin (90^\circ + \delta) \sin (90^\circ + \theta) \cdot \cos t$$

Reduciendo al primer cuadrante:

$$\cos Z = \sin \delta \sin \theta + \cos \delta \cos \theta \cos t \quad (3)$$

Esta fórmula nos da  $Z$  en función de  $\delta$  y  $\theta$  y  $t$ ; es decir, sirve para calcular la radiación en un determinado instante. En efecto, reemplazando (3) en la (1) se tiene:

$$R = R_0 (\sin \delta \sin \theta + \cos \delta \cos \theta \cos t) \quad (4)$$

Ello cuando  $\delta$  y  $\theta$  son del mismo signo (pirmavera y verano).  
Si  $\delta$  y  $\theta$  son de distinto signo (otoño-invierno), queda:

$$R = R_0 (-\text{sen } \delta \text{ sen } \theta + \text{cos } \delta \text{ cos } \theta \cdot \text{cos } t) \quad (4')$$

Reemplazando la (3) en la (2), queda:

$$R = R_0 \int_{t_2}^{t_1} (\text{sen } \delta \text{ sen } \theta + \text{cos } \delta \text{ cos } \theta \text{ cos } t) dt$$

Siendo  $t_1$  y  $t_2$  las horas de salida y puesta del sol.

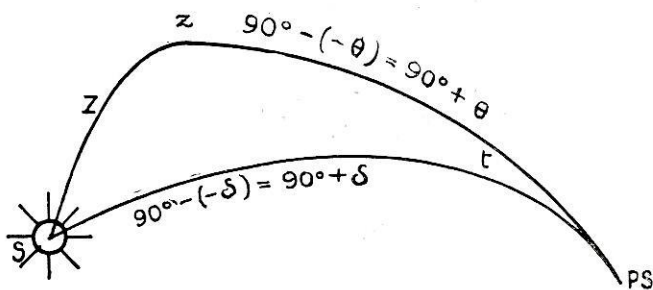


Figura 4

Como el ángulo horario  $t$  varía desde  $0^\circ$  (meridiano del lugar) hasta  $360^\circ$ , en sentido retrógrado, que es el movimiento diurno, integraremos desde 0 hasta  $t_2$  y obtenemos:

$$\frac{R}{2} = R_0 \left[ \text{sen } \delta \text{ sen } \theta \left( \frac{t_2}{\theta} \right) + \left[ \text{cos } \delta \text{ cos } \theta (\text{sen } t) \right] \frac{t_2}{\theta} \right]$$

y también:

$$R = 2 R_0 (\text{sen } \delta \text{ sen } \theta t_2 + \text{cos } \delta \text{ cos } \theta \text{ sen } t_2) \quad (5)$$

La (5) permite calcular la radiación recibida en un día determinado y  $t_2$  será el valor de la mitad del arco diurno expresado en radianes, lo que comprende el paréntesis de la (5), equivale a un ángulo expresado en radianes; dicho ángulo llevado a grados y luego a minutos de hora (15° equivalen a una hora, es decir 60 minutos), nos dará el factor que, multiplicado por  $2 R_0$  expresará  $R$  en  $\text{cal}/\text{cm}^2/\text{día}$ .

## CONFECCION DEL NOMOGRAMA

1) *Adaptación de la fórmula para su representación:*

La fórmula se puede simplificar de la siguiente manera:

$$2 R_0 = 3,88$$

Para reducir un ángulo de radianes a grados sexagesimales se lo multiplica por 206.265 (ángulo en segundos de un radian); luego para llevar ese mismo ángulo a grados se lo divide por 3.600 y el resultado multiplicado por 4 nos dará la equivalencia del ángulo en minutos de hora ( $1^\circ = 4$  minutos).

$$R = \frac{3,80 (\alpha) 206.265}{3.600} \cdot 4 = 889.23 (\alpha)$$

En tal caso es:

$$\alpha = \text{sen } \delta \text{ sen } \theta \cdot t_2 + \text{cos } \delta \text{ cos } \theta \text{ sen } t_2$$

Como  $t_2$  es la mitad del arco diurno, puede variar desde 0 a  $180^\circ$ , es decir, desde 0 hasta 12 horas, nos conviene introducir otro factor que transforma directamente a  $t_2$ , expresado en horas, a radianes.

$$1 \text{ hora} = 15^\circ = 54.000 \text{ segundos de ángulo}$$

$$1 \text{ radian} = 206.265 \text{ segundos de ángulo}$$

Es decir, que el número de horas del semiarco diurno, multiplicado por 54.000 dará el valor en segundos de ángulo; y ese valor dividido por 206.265 dará el ángulo en radianes. Luego el factor buscado será:

$$\text{horas} = \frac{54.000}{206.265} = \text{horas} \times 0,262$$

De esta manera la fórmula queda:

$$R = 889,23 (0,262 \text{ sen } \delta \text{ sen } \theta t_2 + \text{cos } \delta \text{ cos } \theta \text{ sen } t_2) \quad (6)$$

Donde  $t_2$  es la mitad de la duración del día expresado en horas y fracción.

Los valores límites de la fórmula son:

- a) Cuando  $\delta=0$  (equinoccios),  $t=6$  horas  $= 90^\circ$ ,  $\text{sen } 90^\circ = 1$ ; por lo tanto:  $R = 889,23 \cos \theta$ . O sea, depende del coseno de la latitud. Si también  $\theta = 0$  (ecuador),  $\cos 0^\circ = 1$ ;  $R = 889,23$ . Es decir que ese día  $R = 889,23$ , que es el valor de la radiación para localidades del ecuador.
- b) Si  $\theta = 0$  (ecuador),  $R = 889,23 \cos \delta$ , es decir, que en el ecuador la radiación sólo depende del coseno de la declinación. Si  $\delta = 0$ , se vuelve a obtener el valor anterior.
- c) Si  $\theta = 90^\circ$  (polo),  $\cos 90^\circ = 0$ ,  $\text{sen } 90^\circ = 1$ ;  $R = 889,23 (0,262 \text{ sen } \delta \text{ sen } \theta t)$ . Cuando  $\delta$  tiene igual signo que  $\theta$ ,  $t_2 = 12$  horas;  $R = 2.792,18 \text{ sen } \delta$ . Sólo depende del seno de la declinación.

Para construir el nomograma se requiere una curva para cada latitud, de modo que cada curva se tiene  $\theta = \text{constante}$ . Luego agrupando bajo una sola constante a todos aquellos que lo son, haciendo  $t_2 = T$ , resulta:

$$R = C_1 \text{ sen } \delta T + C_2 \cos \delta \text{ sen } T \quad (7)$$

La fórmula (7) incluye dos variables:  $\delta$  y  $T$ , como expresión de dos funciones diferentes, lo que complica la construcción del nomograma. Para evitar esto se divide todo por  $\cos \delta$ :

$$\frac{R}{\cos \delta} = C_1 \text{ tang } \delta T + C_2 \text{ sen } T$$

Además se desprecia a  $\cos \delta$  y el error se salva introduciendo un "factor de declinación", por el cual se deberá multiplicar el resultado dado por el nomograma. Dicho factor, que es el coseno de la declinación, variará por lo tanto en igual forma para declinaciones positivas y negativas; y su variación será: para  $\delta = 0$ ,  $\cos 0 = 1$ , y para  $\delta = 23^\circ 27'$ ,  $\cos = 0,9174$ .

La fórmula del nomograma será entonces:

*Para primavera-verano*

$$R = C_1 \text{ tang } \delta T + C_2 \text{ sen } T \quad (8)$$

*Para otoño-invierno*

$$R = - C_1 \text{ tan } \delta T + C_2 \text{ sen } t \quad (9)$$

## 2) *Cálculo del nomograma*

Para el cálculo del nomograma es necesario poner la (8) y la (9) en forma de funciones, o sea:

$$f_1(u) - f_2(v) \cdot f_3(W) = f_4(w)$$

El nomograma en tal caso es la de la forma detallada en fig. 5, donde para cada latitud tendremos una curva. Las coordenadas de las curvas serán:

$$z_1 = \frac{m_1 \cdot k \cdot f_3(w)}{m_1 \cdot f_3(w) + m_2} \quad (10)$$

Y también:

$$Z = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot f_4(w)}{m_1 \cdot f_3(w) + m_2} \quad (10')$$

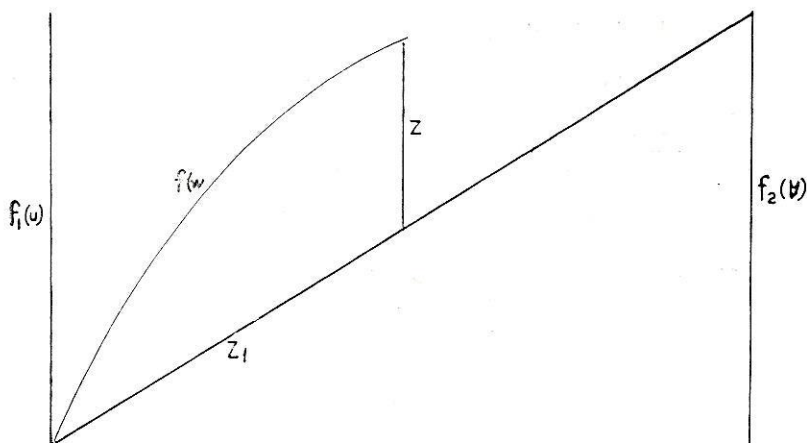


Figura 5

En la (10) y (10') hacemos:

$$f_1(u) = R$$

$$f_2(v) = \text{tang } \delta$$

$$f_3(w) = C_1 T$$

$$f_4(W) = C_2 \text{ sen } T$$

$$m_1 = \text{módulo de } f_1(u)$$

$$m_2 = \text{módulo de } f_2(v)$$

$$k = \text{longitud en centímetros del eje diagonal}$$

En la escala de declinaciones figuran las fechas del año correspondientes a cada declinación; y en las escalas de la radiación se ha calculado una escala adyacente con los milímetros equivalentes de agua que se evaporan por día para cada valor diario de  $R'$ . La escala de radiación ha sido calculada en base a un calor



latente de vaporización de 590 cal por cada  $\text{cm}^3$  de agua. Como la radiación se da en  $\text{cal}/\text{cm}^2/\text{día}$ , 590 calorías equivalen a la evaporación de 10 mm de agua por día.

### 3) *Tablas adicionales*

Con la (8) se ha calculado el nomograma para primavera-verano y con la (9) para otoño-invierno; ambas utilizan el mismo eje central de declinación.

Los datos necesarios para utilizar el nomograma son:

- 1) Latitud del lugar.
- 2) Número de horas del día en que se quiere determinar la radiación.
- 3) Declinación del sol para ese día.

La latitud es un dato que se conoce perfectamente para cada localidad. El número de horas de un día se puede calcular con la exactitud que se desee con la fórmula:

$$\cos \frac{\Delta}{2} = - (\text{tg } \delta - \text{tg } \theta)$$

Donde:

$\Delta$  es el arco diurno

$\delta$  declinación del sol del día considerado

$\theta$  latitud del lugar

Para facilitar la obtención de este dato el nomograma incluye tablas de duración del día para distintas latitudes y declinaciones, expresadas en horas y fracción.

La declinación del sol, al ser el mismo dato para cualquier lugar del globo, figura en el eje central del nomograma, y a ambos lados de dicho eje las fechas que corresponden a cada declinación. Entrando en la tabla con un punto del eje central, que quedó frente a la fecha deseada, no se requiere conocer la declinación para ese día. Para mayor exactitud en este dato se puede consultar la efemérides publicada por cualquier observatorio astronómico que consigne la declinación del sol día por día.

### EMPLEO DEL NOMOGRAMA PARA CALCULAR LA RADIACION TEORICA

Para calcular la radiación teórica con el nomograma se deben seguir los pasos que se detallan:

- 1º) Con el dato de la latitud del lugar se elige la curva co-

rrespondiente, o interpola gráficamente para latitudes intermedias.

- 2º) Luego, conociendo el arco diurno, que se obtiene para el día correspondiente, en la tabla anexa al nomograma se marca el punto donde  $T$  corta a  $\theta$ .
- 3º) En el eje central del nomograma se marca otro punto frente a la fecha deseada.
- 4º) Se unen ambos puntos con una recta, la que cortará el eje  $R'$  señalando su valor en cal/cm<sup>2</sup>/min., o en altura equivalente de agua evaporada, en mm/día.
- 5º) El valor así obtenido,  $R'$ , se ajusta, multiplicándolo por el "factor de declinación", que también puede obtenerse en el nomograma en función de  $\delta$ . Se debe poner especial cuidado de usar el lado del nomograma que corresponde a la estación del año cuyos datos se quiere determinar.

Si en este nomograma se invierte la ubicación de las estaciones, se lo puede usar igualmente para el hemisferio norte.

### 1) *Ventajas e inconvenientes del nomograma. Sus limitaciones*

Como todos los métodos gráficos, su ventaja radica en la rapidez de la obtención de los datos. Además, por la propia disposición del nomograma, es fácil interpolar gráficamente latitudes intermedias sin cometer errores apreciables.

Si se requieren datos exactos, lógicamente no se pueden obtener con un método gráfico, y en ese caso habrá que usar la fórmula (6). Aun cuando para una gran exactitud también se deberá tener en cuenta la influencia del radio vector de la órbita terrestre.

Por el tipo de nomograma las escalas de  $T$  deben empezar en 0, lo cual hace que para el lado primavera-verano sea sólo utilizable la zona ubicada más allá de las 12 horas. La simplificación hecha para poder calcular el nomograma, de despreciar el valor del coseno de la declinación, hace que sea necesario afectar el resultado por un factor.

### 2) *Ejemplo de aplicación del nomograma*

1º Determinar la radiación teórica recibida en un lugar situado a 20° de latitud Sur, el día 28 de enero.

- a) En el eje central del nomograma vemos que para el día 28 de enero corresponden 19 grados de declinación.
- b) En la tabla de arcos diurnos leemos  $T = 13$  horas.

- c) En la mitad del nomograma correspondiente a primavera-verano se marca el punto de intersección de  $\theta = 20^\circ$  y  $T = 13$  horas.
- d) Uniremos mediante una recta el punto así determinado con el punto correspondiente al día 28 de enero. Esa recta corta al eje de la radiación en un valor  $R' = 1.000$  cal. = 17.0 mm.
- e) Para declinación  $19^\circ$  en la tabla de F estimamos:  $F = 0,945$ .

Luego:

$$R = R' \times F = 1.000 \times 0,945 = 945 \text{ cal}$$

$$= 17,0 \times 0,945 = 16,06 \text{ mm}$$

2º Determinar la radiación teórica recibida en un lugar situado a  $40^\circ$  de latitud Sur, el día 30 de agosto.

Siguiendo los mismos pasos, pero utilizando la mitad del nomograma correspondiente a otoño-invierno obtenemos:

- a)  $\varepsilon = 9^\circ$
- b)  $T^i = 11$  horas
- c)  $R' = 550$  cal = 9,4 mm
- e)  $F = 0,987$

Luego:

$$R = 542 \text{ cal}$$

$$= 9,27 \text{ mm}$$

Cuando se quieren determinar numerosos datos para una misma localidad se facilita la tarea con la siguiente tabla de valores:

$$\theta = x^0$$

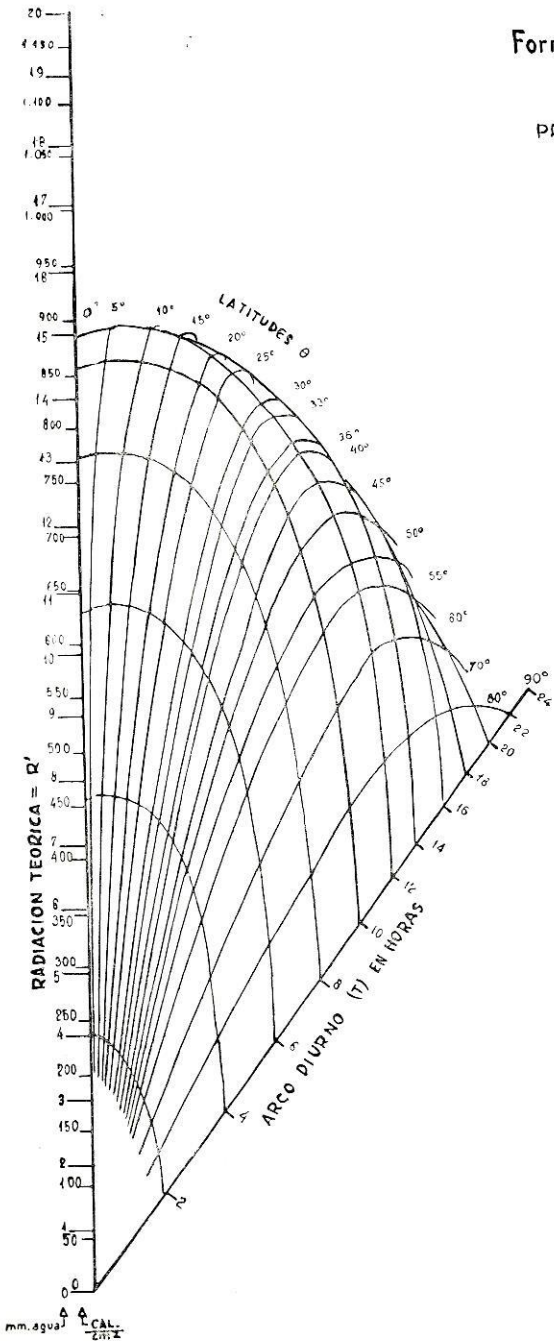
Fecha	$\varepsilon^\circ$	T (horas)	R'	F	R

BIBLIOGRAFIA

- AMERICAN METEOROLOGICAL SOCIETY (1951). *Compendium of Metereology*, Boston, Mass. Capítulo II, pág. 19.
- LIPKA, J. (1962). *Computaciones gráficas y mecánicas*. México.
- SHAW, N. (1942). *Manual of Metereology*, Cambridge University. Volumen II, págs. 4-6.
- BOUCHET, R. J. (1963). *Annales Agronomiques*, Inst. Nat. de la Recherche Agr. Francia.

Formula: R

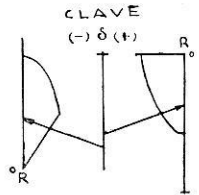
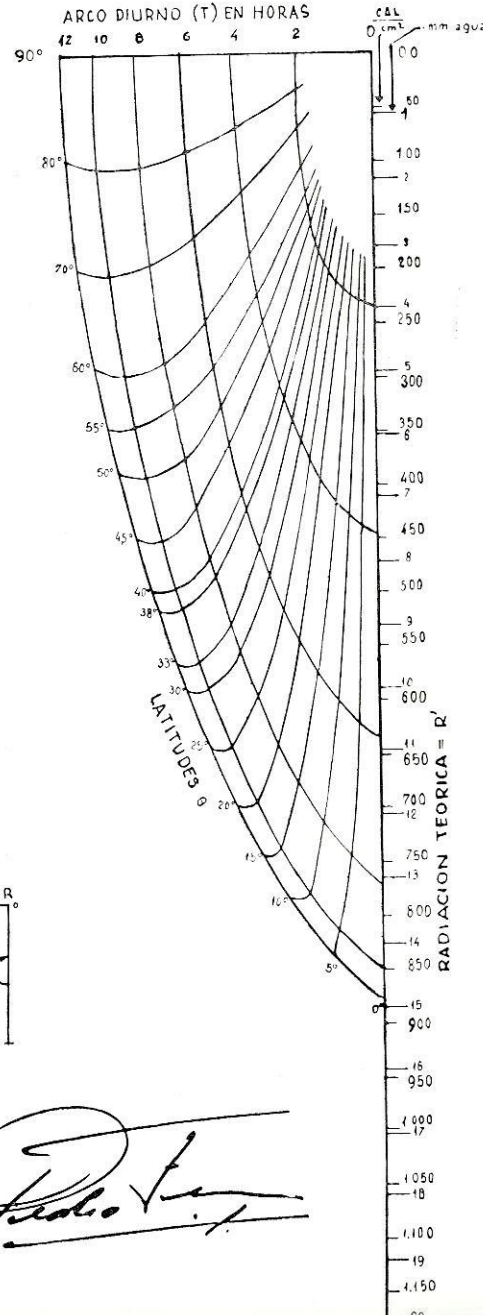
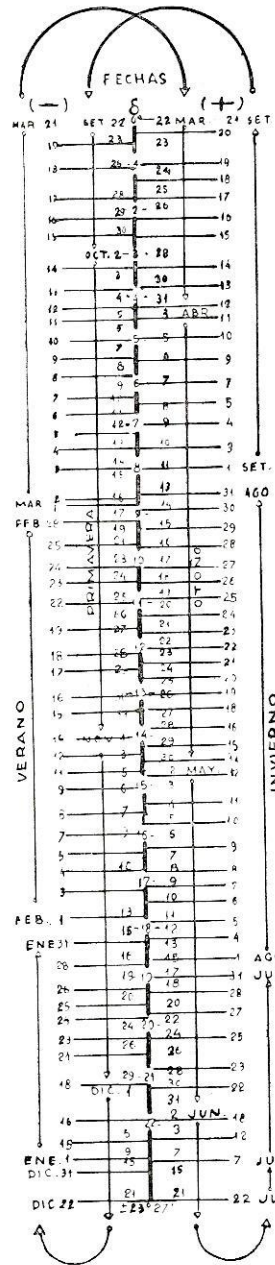
PRIMAVERA



Formula:  $R = 2 R_0 (\text{Sen } \delta \text{ Sen } \theta t_2 + \text{Cos. } \delta \text{ Cos. } \theta \text{ Sen } t_2)$

PRIMAVERA - VERANO

OTOÑO INVIERNO



*Handwritten signature*

Tablas para los arcos diurnos expresados en horas y Fraccion (T)  
PRIMAVERA Y VERANO

θ	0°	5°	10°	15°	20°	23°27'
0°	12-	12-	12-	12-	12-	12-
15°	12-	12.10	12.37	12.55	12.75	12.88
20°	12-	12.25	12.49	12.75	13.02	13.22
25°	12-	12.32	12.63	12.96	13.31	13.56
30°	12-	12.39	12.79	13.18	13.62	13.94
33°	12-	12.44	12.88	13.34	13.83	14.19
35°	12-	12.47	12.95	13.45	13.97	14.35
40°	12-	12.58	13.14	13.74	14.38	14.85
45°	12-	12.67	13.35	14.07	14.85	15.44
60°	12-	13.17	14.37	15.72	17.22	18.67
66°33'	12-	13.55	15.20	17.08	19.80	24-
70°	12-	13.85	15.87	18.34	24-	24-
75°	12-	14.53	17.48	24-	24-	24-
80°	12-	15.97	24-	24-	24-	24-
90°	0-	24-	24-	24-	24-	24-

OTOÑO E INVIERNO

θ	0°	5°	10°	15°	20°	23°27'
0°	12-	12-	12-	12-	12-	12-
15°	12-	11.82	11.63	11.45	11.25	11.12
20°	12-	11.75	11.51	11.25	10.98	10.78
25°	12-	11.68	11.37	11.04	10.69	10.44
30°	12-	11.61	11.21	10.82	10.38	10.06
33°	12-	11.56	11.12	10.66	10.17	9.81
35°	12-	11.53	11.05	10.55	10.03	9.65
40°	12-	11.42	10.86	10.26	9.62	9.15
45°	12-	11.33	10.65	9.93	9.15	8.66
60°	12-	10.83	9.63	8.28	6.78	5.33
66°33'	12-	10.45	8.80	6.92	4.40	0-
70°	12-	10.15	8.13	5.66	0-	0-
75°	12-	9.47	6.52	0-	0-	0-
80°	12-	8.03	0	0-	0-	0-
90°	0-	0-	0-	0-	0-	0-

EN ESTAS TABLAS NO SE HA TOMADO EN CUENTA NI EL DIAMETRO ADARENTE DEL SOL NI LA REFRACCION ATMOSFERICA QUE ALARGAN EL DIA, SOBRE TODO EN LATITUDES ALTAS.

DECLINACION δ°	FACTOR DE CORRECCION POR DECLINACION												
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	23°27'
FACTOR (f)	1	.999	.997	.994	.990	.984	.978	.970	.961	.950	.939	.927	.917

NOTA: SIEMPRE (R) SE MULTIPLICA POR EL (f) CORRESPONDIENTE

$R = R' \cdot f$

U.N.C. FACULTAD DE CIENCIAS AGRARIAS  
CATEDRA DE HIDROLOGIA AGRICOLA  
NOMOGRAMA PARA DETERMINAR LA RADIACION TEORICA RECIBIDA POR DIA Y POR cm² EN AUSENCIA DE ATMOSFERA PARA LATITUDES SUR